

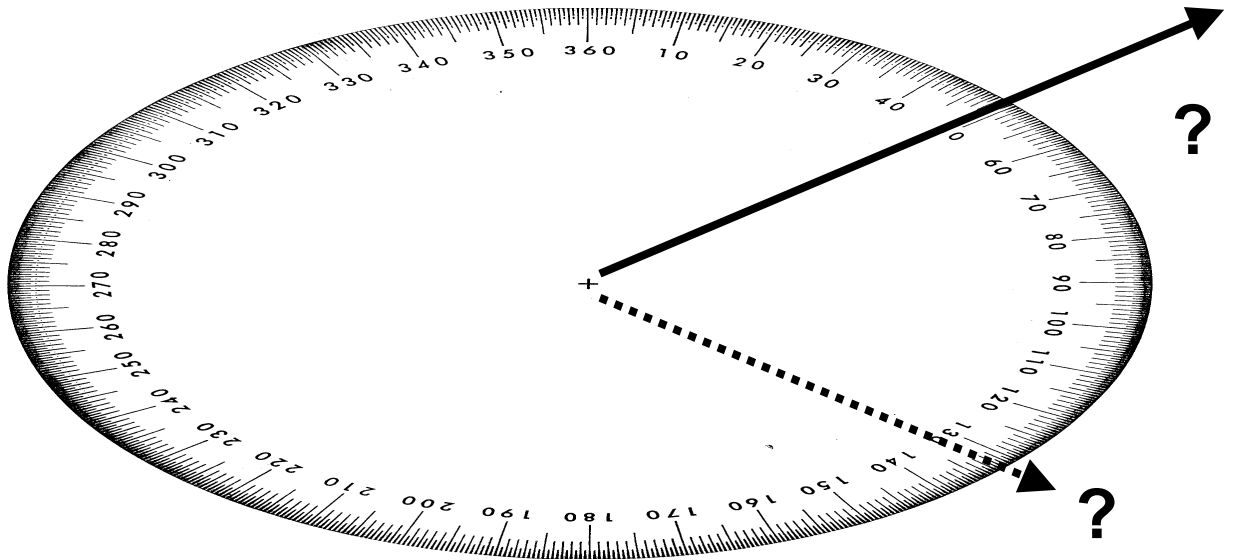
Unterrichtsprojekte Natur und Technik

	Landeshauptstadt Hannover	Vinnhorster Weg 2 30419 Hannover	
	Schulbiologiezentrum Hannover	Telefon: 0511-168-47665/7 Fax: 0511-168-47352 E-mail: schulbiologiezentrum@hannover-stadt.de Internet: www.schulbiologiezentrum-hannover.de	

19.46

Für fachübergreifenden Unterricht,
Arbeitsgemeinschaften, Projektwochen
und Schullandheimfahrten:

Wohin, bitte, geht's nach Neuseeland? Berechnung eines dreidimensionalen globalen Wegweisers, z.B. für den Schulhof



Gehören Sie auch zu den Menschen, die Flugzeugen und ihren Kondensstreifen hinterher träumen oder am Strand grübeln, wie es auf der anderen Seite des Meeres aussieht? Wenn Sie dann auch noch einem lehrenden Beruf nachgehen, könnten Sie andere Menschen mit ihrer privaten Neugier anstecken und „mit zu reisen“.

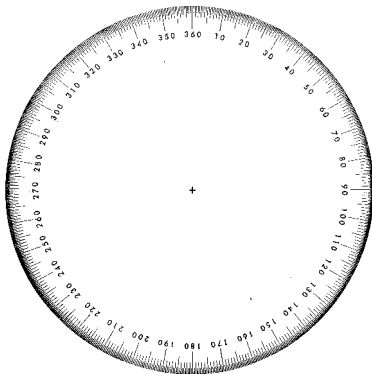
Vielleicht bringt die Möglichkeit der Arbeit mit dem Computer Schüler auch dazu, mit Atlas, Geodreieck, Zirkel und einer Handvoll Werkzeug ein Schulprojekt zu tragen, dass die Schule zum „Weltmittelpunkt“ macht.

Der folgende Projektvorschlag beschreibt die Berechnung und Konstruktion eines dreidimensionalen „globalen“ Wegweisers, der, von Schülern geplant und z.B. auf dem Schulhof errichtet, einen nachhaltigen Beitrag zur Orientierung auf der Erde und zur Entwicklung unseres Raumvorstellungsvermögens leisten kann.

Am Kröpcke in Hannover gibt es einen solchen (zweidimensionalen) Wegweiser. Da bleibt schon mal jemand stehen um etwa eine Linie zu seinem Ferientraum zu schlagen. Leider ist hier zwischen viel Beton nur ein Ausschnitt des Himmels und erst recht kein Horizont zu sehen. Und oft fehlt in der in das Pflaster eingelassenen Kompassrose gerade das Urlaubsziel... Der hier vorgestellte Wegweiser kann überall „in Szene“ gesetzt werden und ganz auf eigene Wunschziele gerichtet sein.

Der kürzeste Weg auf der Kugeloberfläche

Die Beschäftigung mit der Frage „Wohin geht's nach...“ ist natürlich in erster Linie geographischer Natur, denn zunächst muss ich herausfinden, wo der gesuchte Ort liegt und in welchem räumlichen Verhältnis er zum eigenen Standort steht. Das geschieht am besten mit dem Globus und einem Faden. Er zeigt die Richtung des kürzesten Weges, den Weg selbst und die Entfernung an. Die Länge der Fadenstrecke von A nach B ist ein Bruchteil der Fadenlänge, die sich um die ganze Erde spannen lässt. Beträgt der Umfang des Globus z.B. 125 cm (entspricht der Äquatorlänge von ca. 40000 km) und die Fadenlänge AB 57 cm, dann ist die Distanz zwischen den beiden Orten $57/125 \cdot 40000 = 18240$ km. Bei größeren Globen kann im Ort A eine kleine, auf den Nordpol orientierte Kompassrose aufgeklebt werden. Diese Übung sollte grundsätzlich vor jeder weiteren Lösungsstrategie stehen, selbst wenn sie nur mäßig genau und eigentlich nur bei größeren Distanzen anwendbar ist.



Genauere Ergebnisse sind auf mathematischem Wege zu erzielen. Moderne Taschenrechner haben der Mathematik glücklicherweise viel von ihrem Schrecken genommen. Es ist letztlich nur erforderlich, im Atlas die geographischen Breiten- und Längewerte der Orte zu bestimmen, was den oft vernachlässigten Umgang mit dem Koordinatensystem übt. Die gefundenen Werte müssen dann nur in bestimmter Reihenfolge, den unten angegebenen Formeln entsprechend, in den Taschenrechner eingegeben werden. In der vorliegenden Projektbeschreibung finden Sie eine Beispielrechnung, an der Sie Ihre Ergebnisse überprüfen können. Wem das zu kompliziert ist, der kann sich eines hier abgedruckten Computerprogramms bedienen, welches bei uns gegen Vorlage

einer Diskette kostenlos erhältlich ist.

Es läuft nach Installation von Qbasic auf jedem PC. Bis Windows 95 gehörte Qbasic zum Standard-Lieferumfang, ist aber auch heute noch stark verbreitet.

Einige wenige Grundlagen zur Geometrie der Erdoberfläche:

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Orten auf der annähernd kugelförmigen Erde ist Teil eines erdumspannenden Großkreises und wird in der Navigation **Orthodrome** genannt. Sie entspricht dem Faden, der auf dem Globus zwischen A und B gespannt wird. Die Länge der Orthodrome sowie der Anfangskurs können mit den unten abgedruckten Formeln der sphärischen Trigonometrie ermittelt werden. Diese sind aus dem Seitenkosinus- und dem Winkelkosinussatz abgeleitet, die hier aber nicht zur Debatte stehen.

Der globale Wegweiser zeigt

- die Richtung auf der Erdoberfläche (den Anfangskurs der Orthodrome, $0^\circ - 360^\circ$ im Uhrzeigersinn)
- die Distanz auf der Erdoberfläche (kürzeste Verbindung auf dem Großkreis in km)

- die Distanz des geraden, kürzesten Weges (durch die Erde hindurch)
- den dazugehörigen „Abtauchwinkel“ (Sehntangentenwinkel) zur horizontalen Erdoberfläche

Dabei gewinnen wir manche überraschende Perspektive: Neuseeland liegt auf Schulwandkarten, in der Tagesschau (und in vielen Köpfen!) ganz rechts unten und Europa in der oberen Mitte. Wir oben, die anderen unten. Also: Kurs Südost!?

Stopp! Man hat uns doch gesagt, die Erde sei rund. Vielleicht ist es anders herum kürzer? Kurs Südwest, oder...? Mit dem Faden und dem Globus merken wir bald, das wir ganz falsch liegen: Neuseeland liegt (aus deutscher Perspektive) in nordöstlicher Richtung (46°) und der Faden nähert sich in Nordsibirien schon bedenklich der Arktis, um sich dann über Ostasien wieder südost- dann südwärts auf das Ziel einzuschwenken.

Diese Strecke ist mit etwa 18300 km Länge die kürzeste mögliche Verbindung.

Der auf dem Globus ausgespannte Faden zeigt, dass der Anfangskurs im Startort nicht konstant bleibt. Ein Autopilot, der starr einer eingestellten Kompassrichtung folgt, führt also in die Irre. Dennoch zeigt unser Wegweiser in die richtige Richtung, denn er steht an einem bestimmten Ort und hier gilt ein entsprechender Kurs (der sich mit wachsender Entfernung immer weiter vom Anfangskurs entfernt!).

Übrigens, wir könnten uns auch auf konstantem Kurs bewegen, der in der Navigation als **Loxodrome** bezeichneten Linie. Sie hat für Kapitäne den Vorteil, einer einmal eingestellten Kompassrichtung folgen zu können, führt aber mit steigenden Distanzen im Vergleich zur Orthodrome zu deutlich längeren Wegen.

Eine ungewöhnliche Option ist, den Wegweiser dreidimensional zu gestalten. Dann zeigt er in die Richtung, die ein (Super-)Maulwurf nutzen könnte, der sich geradlinig auf dem wirklich kürzesten Wege durch die Erde bohrt.

Der Länge der **Sehne** (direkte Verbindung A-B) und der **Sehntangentenwinkel**, der Aufschluss gibt, in welchem Winkel sich der Maulwurf unter die (ebene) Erdoberfläche eingraben muss kann mit den Mitteln der klassischen Geometrie zeichnerisch oder rechnerisch ermittelt werden.

Im Falle Neuseelands zeigt der in Hannover aufgestellte Wegweise nach Nordosten (45°), in seiner dreidimensionalen Variante aber gleichzeitig 82° unter den Horizont (also fast nach unten!). Der Blick geht also zunächst nach Nordost und dann auf die Fußspitzen, etwas mehr als 12600 km lang auf dieser Geraden muss sich der hannoversche Super-Maulwurf durch die Erde bohren, um dann in Neuseelands Hauptstadt wieder ans Tageslicht zu gelangen.

Der Computer gibt (mit Qbasic) nach Eingaben der geographischen Koordinaten für Hannover und Wellington folgendes Ergebnis aus:

Ort A? Hannover
Breite $^\circ, ' ? 52,22$
Länge $^\circ, ' ? 9,43$

Ort B? Wellington
Breite $^\circ, ' ? -41,17$
Länge $^\circ, ' ? 174,46$

Hannover - Wellington
Distanz : 18341.62 km
Kurs : 48.4036°
Sehntangentenwinkel : 82.48801°
Länge der Sehne Hannover-Wellington : 12630.66 km

Die Werte dürfen gerne gerundet werden. Das scheinbar so präzise Ergebnis der Computer-

berechnung geht nämlich von einer idealen Erde in Kugelgestalt aus. Die Erde ist in Wirklichkeit ein an den Polen abgeplattetes sogenanntes Rotationsellipsoid und keine Kugel. Um aber wenigstens unter der Annahme einer Kugelgestalt genaue Ergebnisse zu erzielen, bedarf es der exakten Kenntnis der geographischen Koordinaten, d.h. mindestens bis auf die (Bogen-) Minute genau. Dies ist in der Schule kaum möglich, denn im Atlas können die Schüler meist nur zwischen den Breiten- und Längenkreisen interpolieren.

Der fertige Wegweiser wird schon aus fertigungstechnischen Gründen kaum auf ein Grad genau in die berechnete Richtung zeigen, deshalb darf das Rechenergebnis einfach auf ganze Gradwerte auf- bzw. abgerundet werden.

Formeln:

Distanz

$$\cos b = \sin \varphi_A * \sin \varphi_B + \cos \varphi_A * \cos \varphi_B * \cos l$$

$$l = \lambda_B - \lambda_A$$

$$D = b * \pi / 180$$

b = Bogenlänge

φ_A geographische Breite des Ortes A

φ_B geographische Breite des Ortes B

λ_A geographische Länge des Ortes A

λ_B geographische Länge des Ortes B

Beispiel (Mit dem Taschenrechner berechnet):

Achtung: südliche Breite und westliche Länge als negative Werte eingeben!

Ort A: Hannover 52°22'N, 9°43'O

Ort B: Wellington 41°17'S, 174°46'O

$$l = 174.46 - 9.43 = 165.03$$

$$\cos b = \sin 52.22 * \sin -41.17 + \cos 52.22 * \cos -41.17 * \cos 165.03$$

$$\cos b = -0.965808947$$

$$b = 164.9741478$$

$$\text{Distanz} = 164.9741478 * 6370 * \pi / 180 = 18341,4 \text{ km} \approx 18341 \text{ km}$$

Richtung

(Anfangs-Kurswinkel der Orthodrome)

$$\cot \alpha = (-\sin \varphi_A * \cos l + \tan \varphi_B * \cos \varphi_A) / \sin l$$

$$l = \lambda_B - \lambda_A$$

$$\tan \alpha = 1 / \cot \alpha$$

Mit dem Taschenrechner berechnet:

$$\cot \alpha = (-\sin 52.22 * \cos 165.03 + \tan -41.17 * \cos 52.22) / \sin 165.03$$

$$\cot \alpha = 0.881847985$$

$$\tan \alpha = 1 / 0.881847985 = 1.133982293$$

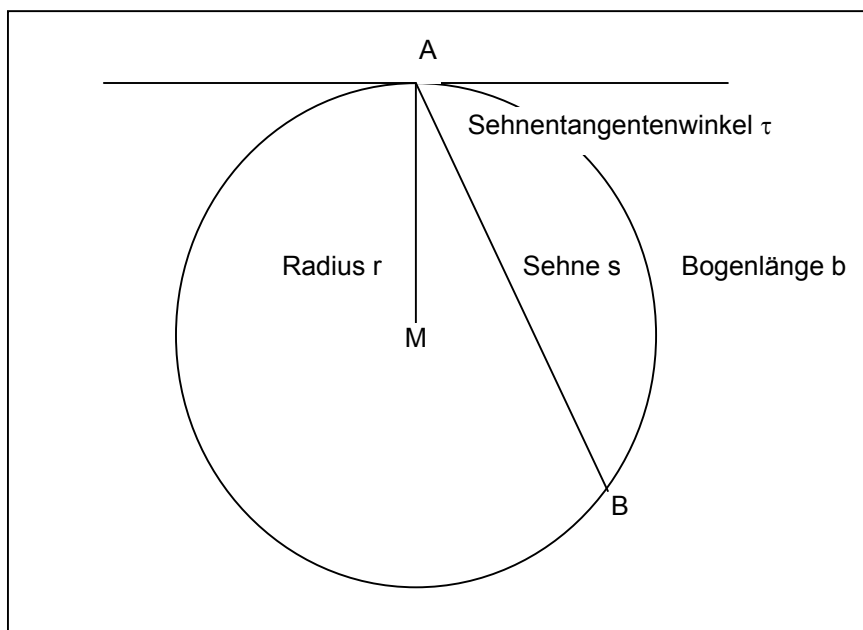
$$\alpha = 48,592^\circ \approx 49^\circ$$

Der errechnete Kurswinkel (α) muss in einen Kompasskurs verwandelt werden:

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Östlicher Kurs	Kurs = α	Kurs = $180^\circ + \alpha$
Westlicher Kurs	Kurs = $360^\circ - \alpha$	Kurs = $180^\circ - \alpha$

Beispiele:

Winkel α positiv und Kurs östlich Tokyo ($35^\circ 35' \text{N}$, $139^\circ 45' \text{O}$): $\alpha \approx 39^\circ$ Kurs $\approx 39^\circ$	Winkel α negativ und Kurs östlich Kairo ($30^\circ 03' \text{N}$, $31^\circ 15' \text{O}$): $\alpha \approx -44^\circ$ Kurs = $180^\circ + (-44^\circ) \approx 136^\circ$
Winkel α positiv und Kurs westlich New York ($40^\circ 44' \text{N}$, $73^\circ 59' \text{W}$): $\alpha \approx 67^\circ$ Kurs = $360^\circ - 67^\circ \approx 293^\circ$	Winkel α negativ und Kurs westlich. Buenos Aires ($34^\circ 16' \text{S}$, $58^\circ 22' \text{W}$): $\alpha \approx -52^\circ$ Kurs = $180^\circ - (-52^\circ) \approx 232^\circ$



Sehnentangentenwinkel τ

$$\tau = d * 90^\circ / \pi * r$$

d: Distanz in km

π : 3,14159....

r: Erdradius (6370 km)

Beispiel:

Entfernung Hannover – Wellington 18341,4 km

$$18341,4 * 90 / (\pi * 6370) = 82,487^\circ \approx 82^\circ$$

Länge der Sehne

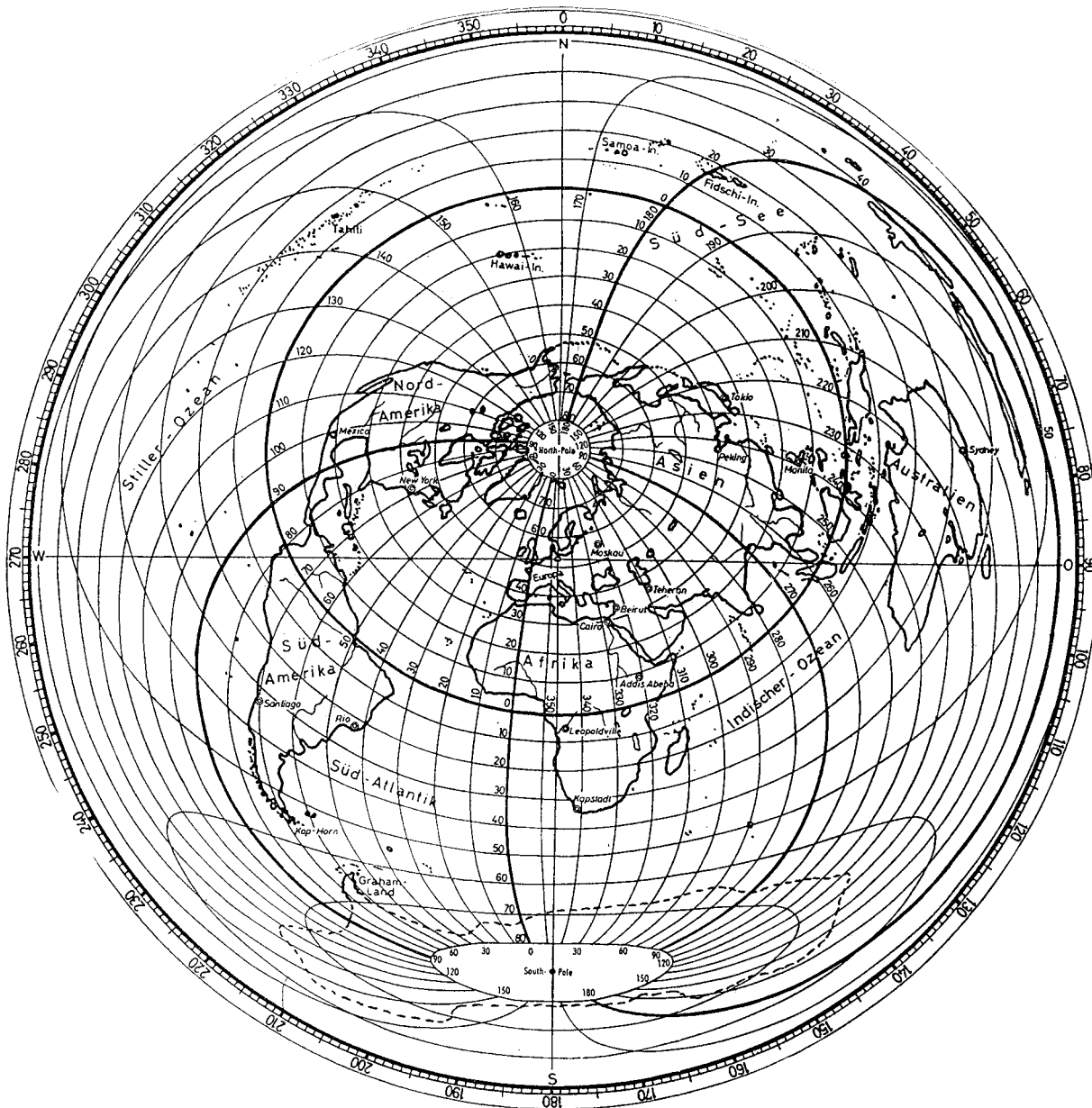
$$s = 2 * r * \sin \tau$$

Beispiel

$$S = 2 * 6370 * \sin 82,487 = 12630,63 \text{ km} \approx 12631 \text{ km}$$

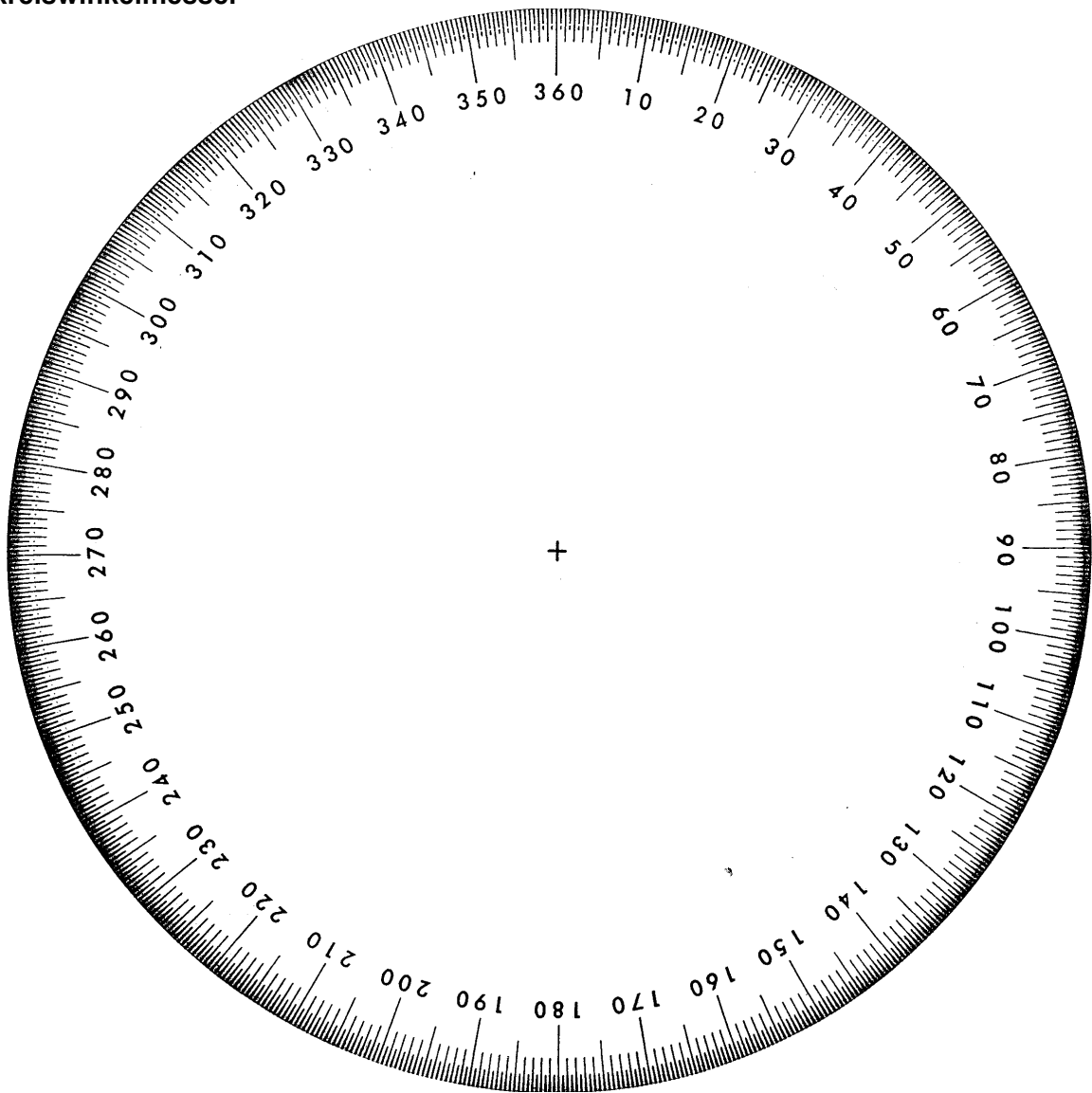
Eurozentrierte Weltkarte

Beamkarte für Radioamateure mit Berlin als Zentrum (gezeichnet DL1CU)



Als Ergebnis des Projektes könnte die Erde, dieser Karte ähnlich, aber einfacher, mit Pinsel und Farbe auf dem Schulhof entstehen. Voraussetzung ist ein immer dichter werdendes Netz von Orten, für die die Distanz und der Kurs errechnet worden ist. Mit der Zahl der Orte werden die Umrisse der Kontinente immer genauer. Realistischerweise wird man sich aber wohl auf die Abbildung einzelner Orte beschränken.

Vollkreiswinkelmesser



Qbasic - Programm

Die Datei (ortho.bas, nur 2,55 KB) ist im Schulbiologiezentrum Hannover kostenlos erhältlich (Bringen Sie bitte eine Diskette mit bzw. geben Sie uns Ihre e-mail Adresse)
Sie benötigen das Programm Qbasic (qbasic.exe, 190 KB), die dazu gehörige Hilfedatei (qbasic.hlp 144 KB) und die Datei Konfigurationseinstellungen (qbasic.ini, 132 Byte).

Nach dem Start der Datei Ortho.bas drücken Sie bitte auf die Taste „F5“. Es erscheint nacheinander die Eingabeaufforderungen

Ort A?

Breite °, '?

Länge °, '?

Ort B?

Breite °, '?

Länge °, '?

Die Breiten- und Längenangaben geben Sie bitte in Grad und Minuten ein (durch Komma getrennt, z.B. 52,22 für 52°22'. Wenn die Position nur auf Grad genau geschätzt werden kann, dann setzen Sie eine Null hinter das Komma, z.B. 52,0.

```

REM Programm ermittelt die kürzeste Verbindung zwischen zwei Orten
REM (Anfangskurs, Distanz, Sehnentangentenwinkel und Sehne)
REM Eingabe: Geographische Breite und Länge der beiden Orte
REM in Grad und Minuten (durch Komma trennen)
REM Nördliche Breiten positiv
REM Südliche Breiten negativ
REM östliche Längen positiv
REM Westliche Längen negativ
CLS
CONST PI = 3.141592654#
REM Bei Eingabe Wert 90 durch 89.999 ersetzen!
INPUT "Ort A"; OrtA$
INPUT "Breite °, '"; BAH, BAM
INPUT "Länge °, '"; LAH, LAM
PRINT
INPUT "Ort B"; OrtB$
INPUT "Breite °, '"; BBH, BBM
INPUT "Länge °, '"; LBH, LBM
REM Umwandeln von DMS in DEG-Format
LET BAM = BAM / 60
LET LAM = LAM / 60
LET BBM = BBM / 60
LET LBM = LBM / 60
IF BAH < 0 THEN LET BA = BAH - BAM
IF BAH > 0 THEN LET BA = BAH + BAM
IF LAH < 0 THEN LET LA = LAH - LAM
IF LAH > 0 THEN LET LA = LAH + LAM
IF BBH < 0 THEN LET BB = BBH - BBM
IF BBH > 0 THEN LET BB = BBH + BBM
IF LBH < 0 THEN LET LB = LBH - LBM
IF LBH > 0 THEN LET LB = LBH + LBM
REM Ermitteln der Distanz:
REM Formel->SIN Breite A*SIN Breite B+COS Breite A*COS Breite B*COS Längen-
REM differenz (Formel in Diercke)
SBA = SIN(BA * PI / 180)
TBA = TAN(BA * PI / 180)
SBB = SIN(BB * PI / 180)
TBB = TAN(BB * PI / 180)
CBA = COS(BA * PI / 180)
CBB = COS(BB * PI / 180)
DL = LA - LB
CDL = COS(DL * PI / 180)
SDL = SIN(DL * PI / 180)
DD = SBA * SBB + CBA * CBB * CDL
PRINT
PRINT
PRINT
PRINT
REM Umwandlung in Tangens: TDD
TDD = SQR(1 - DD ^ 2) / DD
D = ATN(TDD) * 180 / PI
IF D < 0 THEN LET D = 180 + D
PRINT OrtA$; " - "; OrtB$
PRINT
PRINT
REM Berechnung Distanz
Distanz = 6370 * D * PI / 180
PRINT "Distanz .: "; TAB(45); Distanz; " km"
REM Berechnung Kurswinkel
COT = (-SBA * CDL + TBB * CBA) / SDL
T = (1 / COT)

```



```

REM IF T < 0 THEN LET T = ABS(T)
REM IF T > 0 THEN LET T = -T
Winkel = ATN(T) * 180 / PI
PRINT
IF T < 0 AND LB > LA THEN PRINT "Kurs :"; TAB(45); ABS(Winkel); ""
IF T < 0 AND LB < LA THEN PRINT "Kurs :"; TAB(45); 180 + ABS(Winkel); ""
IF T > 0 AND LB > LA THEN PRINT "Kurs :"; TAB(45); 180 - Winkel; ""
IF T > 0 AND LB < LA THEN PRINT "Kurs :"; TAB(45); 360 - Winkel; ""
REM Berechnung des Sehnentangentenwinkels
STW = Distanz * 90 / (PI * 6370)
REM Berechnung Länge der Sehne
SINSTW = SIN(STW * PI / 180)
Sehne = 2 * 6370 * SINSTW
PRINT
PRINT
PRINT "Sehnentangentenwinkel :"; TAB(45); STW; ""
PRINT
PRINT "Länge der Sehne "; OrtA$; "-"; OrtB$; " :"; TAB(45); Sehne; " km"

```

Sie können das Programm einfach in den Qbasic editor schreiben oder es auf ihre Festplatte laden. Sie können es aber auch, z.B. in einer Informatik-AG mit den Schülern „neu“ entwickeln (oder verbessern!).

Addis Abeba	9°02'N	38°47'O	Kairo	30°03'N	31°15'O
Adelaide	34°56'S	138°36'O	Kapstadt	33°55'S	18°27'O
Agadez	17°00'N	7°56'O	Kiew	50°26'N	30°31'O
Algier	36°48'N	3°06'O	Kopenhagen	55°40'N	12°35'O
Amsterdam	52°23'N	4°53'O	Lissabon	38°44'N	9°10'W
Anchorage	61°13'N	149°53'W	London	51°24'N	0°06'O
Ankara	40°08'N	33°00'O	Los Angeles	34°03'N	118°14'W
Athen	38°06'N	23°48'O	Madrid	40°24'N	3°41'W
Auckland	36°51'S	174°45'O	Manila	14°35'N	121°02'O
Bagdad	33°18'N	44°24'O	Marseille	43°18'N	5°24'O
Barcelona	41°24'N	2°12'O	Miami	25°47'N	80°12'W
Beijing	39°54'N	116°28'O	Montreal	45°10'N	71°25'W
Beograd	44°48'N	20°30'O	Moskau	55°45'N	37°34'O
Bergen	60°24'N	5°18'O	München	48°09'N	11°37'O
Berlin	52°30'N	13°24'O	Murmansk	69°00'N	33°15'O
Bern	46°57'N	7°26'O	Neapel	40°52'N	14°15'O
Bombay	19°06'N	72°48'O	New Orleans	29°57'N	90°04'W
Boston	42°21'N	71°03'W	New York	40°44'N	73°59'W
Brasilia	15°47'S	47°55'W	Oslo	59°55'N	10°44'O
Brüssel	50°55'N	4°23'O	Paris	48°54'N	2°24'O
Budapest	47°30'N	19°04'O	Perth	31°57'S	115°51'O
Buenos Aires	34°16'S	58°22'W	Prag	50°04'N	14°27'O
Chicago	41°58'N	87°38'W	Quito	0°13'S	78°30'W
Dehli	28°22'N	77°13'O	Reykjavik	64°01'N	21°57'W
Dublin	53°20'N	6°15'W	Rio de Janeiro	22°54'S	43°13'W
Frankfurt a.M.	50°07'N	8°42'O	Rom	41°53'N	12°30'O
Gdansk	54°24'N	18°40'O	San Francisco	37°47'N	122°25'W
Glasgow	55°51'N	4°16'O	Singapur	1°17'N	103°51'O
Göteborg	57°43'N	11°58'N	Sofia	42°41'N	23°19'O
Hamburg	53°33'N	9°58'O	St. Petersburg	59°55'N	30°15'O
Hannover	52°22'N	9°43'O	Stockholm	59°21'N	18°05'O
Hanoi	21°02'N	105°51'O	Suva	18°08'S	178°25'O
Havanna	23°08'N	82°22'W	Sydney	33°52'S	151°12'O
Helsinki	60°10'N	24°58'O	Tokyo	35°35'N	139°45'O
Hongkong	22°16'N	144°08'O	Warschau	52°15'N	21°00'O

Honolulu	21°19'N	157°51'W	Wellington	41°17'S	174°46'O
Irkutsk	52°16'N	104°20'O	Wien	48°14'N	16°20'O
Johannesburg	26°12'S	28°06'O	Wladiwostok	43°08'N	131°54'O

Ein wesentlich dichteres Netz von Positionsangaben erhalten Sie auf der Homepage des Deutschen Amateur Radio Clubs (www.darc.de). Laden Sie sich das Shareware-Programm „beam“ auf ihren Rechner. Nach dem Setzen des Startortes können Sie mit der Maus über die Erdoberfläche fahren und für jeden Punkt der Erde die geographischen Koordinaten, die Entfernung und den Kurs entnehmen. Durch Mausklick können Sie auch die Startposition verändern.

Aber sollten Sie Ihren Schülern diese Adresse nicht besser vorenthalten und sie *nicht* (auch wenn es bequemer wäre) mit Fertigprodukten füttern?

Ingo Mennerich, Mai 2001